



Olimpiada de Matematică - Etapa Locală

Maramureș – 28 februarie 2016

Clasa a VIII - a

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ care satisfac relația:

$$a + 2b + 3c + 21 = 4(\sqrt{a+1} - 1) + 6(\sqrt{2b+1} - 1) + 10(\sqrt{3c+1} - 1)$$

a) Determinați numerele a, b și c .

b) Demonstrați că $\overline{abc}^{2016} + \overline{acb}^{2016}$ nu este pătrat perfect.

2. Fie x și y numere reale astfel încât $4x^2 + 4y^2 + 16x - 12y + 21 = 0$.

Arătați că $|2x - 2y + 7| \leq 4$.

(Supliment Gazeta Matematică nr. 12/2015)

3. a) Demonstrați că $\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}} = \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$ pentru orice număr natural n nenul.

b) Fie $A_n = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}} + \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{35}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sqrt{7} \cdot A_n = \sqrt{2016}$.

4. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$. Considerăm punctele $E \in (BD)$ astfel încât $BD = 4 \cdot DE$ și $E' \in (B' D')$ astfel încât $D' E' = 3 \cdot B' E'$. Dacă M, N, P și Q sunt mijloacele muchiilor $AB, BC, D' C'$, respectiv $A' D'$, arătați că:

a) planele (EPQ) și $(E' MN)$ sunt paralele;

b) dacă $BD' \cap (E' MN) = \{T\}$ și $BD' \cap (EQP) = \{T'\}$, atunci $TT' = 2 \cdot BT$.

(Gazeta Matematică nr. 12/2015)

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte

Timp de lucru 3 ore

Problema 1

Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ care satisfac relația:

$$a + 2b + 3c + 21 = 4(\sqrt{a+1} - 1) + 6(\sqrt{2b+1} - 1) + 10(\sqrt{3c+1} - 1)$$

a) Determinați numerele a, b și c .

b) Demonstrați că $\overline{abc}^{2016} + \overline{acb}^{2016}$ nu este pătrat perfect.

Soluție:

$$a) (\sqrt{a+1} - 2)^2 + (\sqrt{2b+1} - 3)^2 + (\sqrt{3c+1} - 5)^2 = 0 \quad 2p$$

$$a = 3, b = 4, c = 8 \quad 2p$$

$$b) U(348^{2016} + 384^{2016}) = U(8^{2016} + 4^{2016}) = U(6 + 6) = 2 \neq pp \quad 3p$$

Problema 2

Fie x și y numere reale astfel încât $4x^2 + 4y^2 + 16x - 12y + 21 = 0$.

Arătați că $|2x - 2y + 7| \leq 4$.

Soluție. Se aduce la forma $(2x + 4)^2 + (2y - 3)^2 = 4$. 2 p

Se deduce $(2x + 4)^2 \leq 4$. și $(2y - 3)^2 \leq 4$. 1 p

Se obține $|2x + 4| \leq 2$. și $|2y - 3| \leq 2$. 1 p

Deducem $-2 \leq 2x + 4 \leq 2$ și $-2 \leq 2y - 3 \leq 2$

și avem $-2 \leq 2x + 4 \leq 2$ (1) și $-2 \leq -2y + 3 \leq 2$ (2) 2 p

Însumând (1) și (2), $-4 \leq 2x - 2y + 7 \leq 4$

și se finalizează $|2x - 2y + 7| \leq 4$ 1 p

Problema 3

a) Demonstrați că $\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}} = \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$ pentru orice număr natural n nenul.

b) Fie $A_n = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}} + \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{35}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sqrt{7} \cdot A_n = \sqrt{2016}$.

Soluție

a) Se ridică la pătrat $2n + \sqrt{4n^2 - 1} = \frac{2n+1 + 2\sqrt{(2n+1)(2n-1)} + 2n-1}{2}$. 2 p

Finalizare 1 p

b) Se obține $A_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{1}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ 1 p

Deducem $A_n = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{3-1} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5-3} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{7-5} + \dots + \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2n+1 - (2n-1)} \right)$ 1 p

Deci $\sqrt{7} \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2n+1} - 1) = \sqrt{2016}$, de unde $\sqrt{2n+1} - 1 = 24$, astfel $n = 312$. 2 p

Problema 3

Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$. Considerăm punctele $E \in (BD)$ astfel încât $BD = 4 \cdot DE$ și $E' \in (B' D')$ astfel încât $D' E' = 3 \cdot B' E'$. Dacă M, N, P și Q sunt mijloacele muchiilor $AB, BC, D' C'$, respectiv $A' D'$, arătați că:

a) planele (EPQ) și $(E' MN)$ sunt paralele;

b) dacă $BD' \cap (E' MN) = \{T\}$ și $BD' \cap (EQP) = \{T'\}$, atunci $TT' = 2 \cdot BT$.

Soluție.

a) Se demonstrează că $MN \parallel PQ$. 2 p

Se obține $HE' \parallel JE$, unde H mijlocul lui (MN) și J este mijlocul lui (PQ)

(sau $ME' \parallel PE$ sau $NE' \parallel QE$)

(calcul sau congruențe de triunghiuri) 2 p

Finalizare 1 p

b) Deducem $3BT = D'T$ sau analoage. 1 p

Finalizare 1 p